

Correction de la fiche 3 de calcul

Du calcul avec de vrais réels

Exercice 1 — Exponentielle et logarithme

1. Calculons $e^{\ln(3)-\ln(2)}$:

$$e^{\ln(3)-\ln(2)} = e^{\ln(\frac{3}{2})} = \boxed{\frac{3}{2}}.$$

2. Calculons $-e^{-\ln(\frac{1}{2})}$:

$$-e^{-\ln(\frac{1}{2})} = -e^{\ln(2)} = \boxed{-2}.$$

3. Calculons $e^{-\ln(\ln(2))}$:

$$e^{-\ln(\ln(2))} = \frac{1}{e^{\ln(\ln(2))}} = \boxed{\frac{1}{\ln(2)}}.$$

4. $\ln\left(\frac{1}{e^{-\ln(e^2)}}\right)$ Calculons $\ln\left(\frac{1}{e^{-\ln(e^2)}}\right)$:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{e^{-\ln(e^2)}}\right) &= -\ln\left(e^{-\ln(e^2)}\right) \\ &= -\ln(e^{-2}) \\ &= -(-2) \\ &= \boxed{2}. \end{aligned}$$

5. Calculons $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$:

$$\begin{aligned} \ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2}) &= \ln(|e^2|) - \ln(|e|) \\ &= \ln(e^2) - \ln(e) \text{ car } e^2 \text{ et } e \text{ sont positifs} \\ &= 2 - 1 \\ &= \boxed{1}. \end{aligned}$$

6. Calculons $\ln(\sqrt{\exp(-\ln(e^2))})$:

$$\begin{aligned} \ln(\sqrt{\exp(-\ln(e^2))}) &= \ln(\sqrt{\exp(-2)}) \\ &= \ln(\sqrt{e^{-2}}) \\ &= \ln\left[(e^{-2})^{\frac{1}{2}}\right] \text{ car } e^{-2} > 0 \\ &= \ln(e^{-1}) \\ &= \boxed{-1}. \end{aligned}$$

7. Calculons $\exp\left(-\frac{1}{2}\ln(e^{-3})\right)$:

$$\begin{aligned}\exp\left(-\frac{1}{2}\ln(e^{-3})\right) &= \exp\left(-\frac{1}{2} \times (-3)\right) \\ &= \exp\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= \boxed{e^{\frac{3}{2}}} \\ &= (e^3)^{\frac{1}{2}} \\ &= \boxed{\sqrt{e^3}}.\end{aligned}$$

Exercice 2 — Fractions

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$.

Alors on a :

$$\begin{aligned}\frac{x - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + 1} &= \frac{\frac{x^2 - 1}{x}}{\frac{1 + x}{x}} \\ &= \frac{x^2 - 1}{x} \times \frac{x}{1 + x} \\ &= \frac{x^2 - 1}{1 + x} \\ &= \frac{(x - 1)(x + 1)}{1 + x} \\ &= \boxed{x - 1}.\end{aligned}$$

2. Soit t un réel différent de -1 . Posons

$$a = \frac{1}{1 + t^2} - \frac{1}{(1 + t)^2} \text{ et } b = (1 + t^2)(1 + t)^2.$$

Calculons le produit ab .

On a :

$$\begin{aligned}a &= \frac{1}{1 + t^2} - \frac{1}{(1 + t)^2} \\ &= \frac{(1 + t)^2 - (1 + t^2)}{(1 + t^2)(1 + t)^2} \\ &= \frac{1 + 2t + t^2 - 1 - t^2}{(1 + t^2)(1 + t)^2} \\ &= \frac{2t}{(1 + t^2)(1 + t)^2},\end{aligned}$$

donc

$$ab = \frac{2t}{(1 + t^2)(1 + t)^2} \times (1 + t^2)(1 + t)^2 = \boxed{2t}.$$

On peut aussi procéder de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 ab &= \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2} \right) (1+t^2)(1+t)^2 \\
 &= \frac{(1+t^2)(1+t)^2}{1+t^2} - \frac{(1+t^2)(1+t)^2}{(1+t)^2} \\
 &= (1+t)^2 - (1+t^2) \\
 &= 1 + 2t + t^2 - 1 - t^2 \\
 &= \boxed{2t}.
 \end{aligned}$$

Exercice 3 — Puissances

1. Simplifions $\frac{10^5 \cdot 10^{-3}}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{10^5 \cdot 10^{-3}}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}} &= \frac{10^2}{(10^{-2})^{-3}} \\
 &= \frac{10^2}{10^{(-2) \times (-3)}} \\
 &= \frac{10^2}{10^6} \\
 &= \boxed{10^{-4}}.
 \end{aligned}$$

2. Simplifions $\frac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}} &= \frac{10^{3 \times (-5)} \cdot 10^5}{10^{-2}} \\
 &= \frac{10^{-15} \cdot 10^5}{10^{-2}} \\
 &= \frac{10^{-10}}{10^{-2}} \\
 &= 10^{-10 - (-2)} \\
 &= \boxed{10^{-8}}.
 \end{aligned}$$

Exercice 4 — Inégalités

Résolvons l'inéquation (I) suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$:

$$\frac{1}{x-2} \leq \frac{1}{x}.$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x-2}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$, donc

l'inéquation (I) est bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$.

• **Première méthode : par disjonction de cas**

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$.

Procédons par disjonction de cas.

★ **Premier cas : $x > 2$.**

Alors les deux nombres $x - 2$ et x sont strictement positifs.

Par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient alors l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de } (I) &\iff \frac{1}{x-2} \leq \frac{1}{x} \\ &\iff x-2 \geq x \\ &\iff -2 \geq 0, \end{aligned}$$

ce qui est faux.

Ainsi, dans ce cas, x n'est pas solution de l'inéquation (I).

★ **Deuxième cas : $0 < x < 2$.**

Alors on a :

$$\begin{cases} x > 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \frac{1}{x} > 0 \\ \frac{1}{x-2} < 0, \end{cases}$$

donc on a

$$\frac{1}{x-2} < 0 < \frac{1}{x},$$

donc en particulier,

$$\frac{1}{x-2} \leq \frac{1}{x}.$$

Ainsi, dans ce cas, x est solution de l'inéquation (I).

★ **Troisième cas : $x < 0$.**

Alors les deux nombres x et $x - 2$ sont strictement négatifs.

Par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_-^*$, on obtient alors l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de } (I) &\iff \frac{1}{x-2} \leq \frac{1}{x} \\ &\iff x-2 \geq x \\ &\iff -2 \geq 0, \end{aligned}$$

ce qui est faux.

Ainsi, dans ce cas, x n'est pas solution de l'inéquation (I).

Finalement, on a l'équivalence suivante :

$$x \text{ est solution de } (I) \iff 0 < x < 2,$$

donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est $]0; 2[$.

• **Seconde méthode : mise au même dénominateur et signe d'un quotient**

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$.

Alors on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned}
 x \text{ est solution de } (I) &\iff \frac{1}{x-2} \leq \frac{1}{x} \\
 &\iff \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \leq 0 \\
 &\iff \frac{x - (x-2)}{(x-2)x} \leq 0 \\
 &\iff \frac{x - x + 2}{(x-2)x} \leq 0 \\
 &\iff \frac{2}{(x-2)x} \leq 0 \\
 &\iff (x-2)x \leq 0 \text{ car } 2 \text{ est positif} \\
 &\iff \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x-2 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 0 \end{cases} \\
 &\iff 2 \leq x \leq 0 \text{ ou } 0 \leq x \leq 2 \\
 &\iff 0 \leq x \leq 2 \text{ car } 2 > 0 \\
 &\quad \text{(donc la première condition } 2 \leq x \leq 0 \text{ est toujours fausse)} \\
 &\iff 0 < x < 2 \text{ car } x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\} \\
 &\iff x \in]0; 2[.
 \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est $]0; 2[$.

Du calcul avec de vraies fonctions

Exercice 5 — Évaluations

Considérons la fonction suivante :

$$\begin{aligned}
 f:]-1; +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\
 x &\longmapsto \ln(1+x).
 \end{aligned}$$

- Commençons par vérifier que la fonction f est bien définie et dérivable sur $] - 1; +\infty[$.
 - ★ La fonction $u: x \longmapsto 1+x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
 - ★ La fonction $\ln$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, leur composée $f = \ln \circ u$ est définie et dérivable sur l'ensemble suivant :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 1+x > 0\} = \boxed{]-1; +\infty[}.$$

- Calculons alors la dérivée de la fonction f .

Pour tout $x \in]-1; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln \circ u)'(x) \\ &= u'(x) \ln'(u(x)) \\ &= 1 \times \frac{1}{u(x)} \\ &= \boxed{\frac{1}{1+x}}. \end{aligned}$$

1. D'après le calcul précédent, on a :

$$f'(0) = \frac{1}{1+0} = \boxed{1}.$$

2. • Commençons par trouver le domaine de définition de la fonction

$$x \longmapsto f(2e^x - 1).$$

★ La fonction $x \longmapsto 2e^x - 1$ est définie sur $\mathbb{R}$.

★ La fonction f est définie sur $] -1; +\infty[$.

Leur composée $x \longmapsto f(2e^x - 1)$ est donc définie sur l'ensemble suivant :

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} \mid 2e^x - 1 > -1\} &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2e^x > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid e^x > 0\} \quad \text{car } 2 > 0 \\ &= \boxed{\mathbb{R}}, \end{aligned}$$

car la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives.

- Simplifions alors son expression.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(2e^x - 1) &= \ln(1 + 2e^x - 1) \\ &= \ln(2e^x) \\ &= \ln(2) + \ln(e^x) \\ &= \boxed{\ln(2) + x}. \end{aligned}$$

3. • Commençons par trouver le domaine de définition de la fonction

$$x \longmapsto x f'(2x) - 1.$$

★ La fonction $x \longmapsto 2x$ est définie sur $\mathbb{R}$.

★ La fonction f' est définie sur $] -1; +\infty[$.

★ Leur composée $x \longmapsto f'(2x)$ est donc définie sur l'ensemble suivant :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 2x > -1\} = \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[.$$

★ Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto -1$ sont définies sur $\mathbb{R}$, donc par produit et somme, la fonction $x \mapsto xf'(2x) - 1$ est définie sur $\boxed{\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[}$.

- Simplifions alors son expression.

Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$, on a :

$$\begin{aligned} xf'(2x) - 1 &= x \times \frac{1}{1+2x} - 1 \\ &= \frac{x - (1+2x)}{1+2x} \\ &= \frac{x - 1 - 2x}{1+2x} \\ &= \frac{-1 - x}{1+2x} \\ &= \boxed{-\frac{1+x}{1+2x}}. \end{aligned}$$

4. • Commençons par trouver le domaine de définition de la fonction

$$x \mapsto e^{x - \frac{1}{2}f(x)}.$$

- ★ La fonction $x \mapsto x$ est définie sur $\mathbb{R}$.
- ★ La fonction f est définie sur $] -1; +\infty[$.
- ★ Par somme et produit, la fonction $x \mapsto x - \frac{1}{2}f(x)$ est définie sur $] -1; +\infty[$.
- ★ La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$.
- ★ Ainsi, la composée $x \mapsto e^{x - \frac{1}{2}f(x)}$ est définie sur $\boxed{]-1; +\infty[}$.

- Simplifions alors son expression.

Pour tout $x \in] -1; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} e^{x - \frac{1}{2}f(x)} &= e^x \times e^{-\frac{1}{2}f(x)} \\ &= e^x \times \exp\left[-\frac{1}{2}\ln(1+x)\right] \\ &= e^x \times \exp\left[-\ln\left((1+x)^{\frac{1}{2}}\right)\right] \\ &= e^x \times \exp\left[-\ln\left(\sqrt{1+x}\right)\right] \\ &= \frac{e^x}{\exp\left[\ln\left(\sqrt{1+x}\right)\right]} \\ &= \boxed{\frac{e^x}{\sqrt{1+x}}}. \end{aligned}$$

5. • Commençons par trouver le domaine de définition de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{2}f(x^2 - 2x).$$

- ★ La fonction $x \mapsto x^2 - 2x$ est définie sur $\mathbb{R}$.
- ★ La fonction f est définie sur $] - 1; +\infty[$.
- ★ Leur composée $x \mapsto f(x^2 - 2x)$ est donc définie sur l'ensemble suivant :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x > -1\}.$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} x^2 - 2x > -1 &\iff x^2 - 2x + 1 > 0 \\ &\iff (x - 1)^2 > 0 \text{ par identité remarquable} \\ &\iff (x - 1)^2 \neq 0 \text{ car pour tout } x \in \mathbb{R}, (x - 1)^2 \geq 0 \\ &\iff x - 1 \neq 0 \\ &\iff x \neq 1, \end{aligned}$$

donc la fonction $x \mapsto f(x^2 - 2x)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ainsi, la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}f(x^2 - 2x)$ est définie sur $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{1\}}$.

- Simplifions alors son expression.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f(x^2 - 2x) &= \frac{1}{2} \ln(1 + x^2 - 2x) \\ &= \frac{1}{2} \ln[(x - 1)^2] \\ &= \ln\left[\left((x - 1)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &= \ln\left[\sqrt{(x - 1)^2}\right] \\ &= \boxed{\ln(|x - 1|)}. \end{aligned}$$

6. • Commençons par trouver le domaine de définition de la fonction

$$x \mapsto e^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}.$$

- ★ La fonction $x \mapsto x - 1$ est définie sur $\mathbb{R}$.
- ★ La fonction f' est définie sur $] - 1; +\infty[$.
- ★ Leur composée $x \mapsto f'(x - 1)$ est donc définie sur l'ensemble suivant :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 > -1\} = \mathbb{R}_+^*.$$

- ★ La fonction f est définie sur $] - 1; +\infty[$.

★ Donc le quotient $x \mapsto \frac{f(x)}{f'(x-1)}$ est défini sur

$$\{x \in]-1; +\infty[\cap \mathbb{R}_+^* \mid f'(x-1) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}_+^* \mid f'(x-1) \neq 0\}.$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} f'(x-1) = 0 &\iff \frac{1}{1+(x-1)} = 0 \\ &\iff 1 = 0, \end{aligned}$$

ce qui est faux, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x-1) \neq 0$.

Ainsi, la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{f'(x-1)}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

★ La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$.

★ Ainsi, la composée $x \mapsto e^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}$ est définie sur $\boxed{\mathbb{R}_+^*}$.

- Simplifions alors son expression.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{f'(x-1)} &= \frac{\ln(1+x)}{\frac{1}{1+(x-1)}} \\ &= \frac{\ln(1+x)}{\frac{1}{x}} \\ &= x \ln(1+x), \end{aligned}$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\begin{aligned} e^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}} &= \exp[x \ln(1+x)] \\ &= \boxed{(1+x)^x}. \end{aligned}$$

Exercice 6 — Études de fonctions

1. Étudions la fonction

$$f: t \mapsto \sqrt{1 - \frac{2}{t}}.$$

- (a) • Trouvons le domaine de définition de la fonction g .

★ La fonction $u: t \mapsto 1 - \frac{2}{t}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.

★ La fonction racine carrée r est définie sur $\mathbb{R}_+$.

Leur composée $f = r \circ u$ est donc définie sur

$$\{t \in \mathbb{R}^* \mid u(t) \in \mathbb{R}_+\} = \left\{t \in \mathbb{R}^* \mid 1 - \frac{2}{t} \geq 0\right\}.$$

Or pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned}
 u(t) \in \mathbb{R}_+ &\iff 1 - \frac{2}{t} \geq 0 \\
 &\iff \frac{t-2}{t} \geq 0 \\
 &\iff \begin{cases} t-2 \leq 0 \\ t \leq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} t-2 \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} t \leq 2 \\ t \leq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} t \geq 2 \\ t \geq 0 \end{cases} \\
 &\iff t \leq 0 \text{ ou } t \geq 2 \\
 &\iff t < 0 \text{ ou } t \geq 2 \text{ car } t \in \mathbb{R}^*,
 \end{aligned}$$

donc la fonction f est définie sur $] -\infty; 0[\cup [2; +\infty[$.

- Trouvons le domaine de dérivabilité de la fonction f .

★ La fonction $u: t \mapsto 1 - \frac{2}{t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

★ La fonction racine carrée r est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Leur composée $f = r \circ u$ est donc dérivable sur

$$\{t \in \mathbb{R}^* \mid u(t) \in \mathbb{R}_+^*\} = \left\{t \in \mathbb{R}^* \mid 1 - \frac{2}{t} > 0\right\}.$$

Or pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned}
 u(t) \in \mathbb{R}_+^* &\iff 1 - \frac{2}{t} > 0 \\
 &\iff \frac{t-2}{t} > 0 \\
 &\iff \begin{cases} t-2 < 0 \\ t < 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} t-2 > 0 \\ t > 0 \end{cases} \\
 &\iff t < 0 \text{ ou } t > 2,
 \end{aligned}$$

donc la fonction f est dérivable sur $] -\infty; 0[\cup]2; +\infty[$.

(b) Calculons sa dérivée.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a : $u'(t) = 0 - 2 \times \left(-\frac{1}{t^2}\right) = \frac{2}{t^2}$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $r'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$.

Ainsi, pour tout $t \in] -\infty; 0[\cup]2; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= (r \circ u)'(t) \\
 &= u'(t) \times r'(u(t)) \\
 &= \frac{2}{t^2} \times \frac{1}{2\sqrt{u(t)}}
 \end{aligned}$$

donc

$$f'(t) = \frac{1}{t^2} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2}{t}}} = \frac{1}{t^2} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{t-2}{t}}} = \boxed{\frac{1}{t^2} \sqrt{\frac{t}{t-2}}}.$$

- (c) • Étudions les variations de la fonction f .

Les fonctions carré et racine carrée sont strictement positives sur $\mathbb{R}^*$, donc pour tout $t \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$, on a :

$$t^2 > 0 \text{ et } \sqrt{\frac{t}{t-2}} > 0,$$

donc pour tout $t \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$, $f'(t) > 0$.

Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur chacun des intervalles $] - \infty; 0[$ et $[2; +\infty[$.

- Calculons les limites de la fonction f aux bords de son domaine de définition.

★ **Limites en $-\infty$ et en $+\infty$:**

On a $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} 1 - \frac{2}{t} = 1$ et, par continuité de la fonction racine carrée en 1, $\lim_{X \rightarrow 1} \sqrt{X} = 1$, donc par composition de limites, on obtient :

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 1} \text{ et } \boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1}.$$

★ **Limite en 0^- :**

On a $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{2}{t} = -\infty$, donc par produit et somme de limites, on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} 1 - \frac{2}{t} = +\infty.$$

Or $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$, donc par composition de limites, on obtient :

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = +\infty}.$$

★ **Valeur en 2 :**

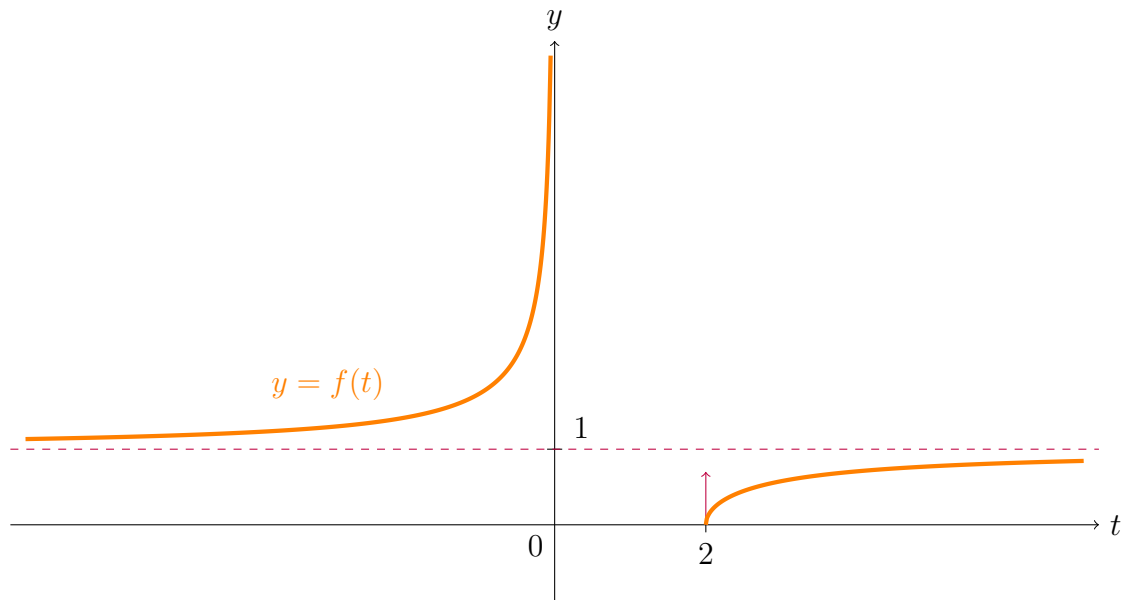
En 2, la fonction f s'annule :

$$f(2) = \sqrt{1 - \frac{2}{2}} = \sqrt{1 - 1} = \boxed{0}.$$

Dressons alors le tableau de variations de la fonction f .

t	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(t)$	+			+
$f(t)$	1 ↗ $+\infty$		0 ↗ 1	

Traçons enfin l'allure du graphe de la fonction f .



2. Étudions la fonction

$$g: x \mapsto \ln(\ln(x) + 1).$$

(a) Trouvons les domaines de définition et de dérivabilité de la fonction f .

- La fonction $\ln$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Donc la fonction $u: x \mapsto \ln(x) + 1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Leur composée $g = \ln \circ u$ est définie et dérivable sur l'ensemble suivant :

$$\{x \in \mathbb{R}_+^* \mid u(x) \in \mathbb{R}_+^*\} = \{x \in \mathbb{R}_+^* \mid \ln(x) + 1 > 0\}.$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned}
 u(x) \in \mathbb{R}_+^* &\iff \ln(x) + 1 > 0 \\
 &\iff \ln(x) > -1 \\
 &\iff x > e^{-1} \text{ par stricte croissance de l'exponentielle sur } \mathbb{R} \\
 &\iff x > \frac{1}{e},
 \end{aligned}$$

donc la fonction g est définie et dérivable sur $\left] \frac{1}{e}; +\infty \right[$.

(b) Calculons sa dérivée.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $u'(x) = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}$.

Ainsi, pour tout $x \in \left] \frac{1}{e}; +\infty \right[$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\ln \circ u)'(x) \\ &= u'(x) \ln'(u(x)) \\ &= \frac{1}{x} \times \frac{1}{u(x)} \\ &= \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln(x) + 1} \\ &= \boxed{\frac{1}{x [\ln(x) + 1]}}. \end{aligned}$$

(c) • Étudions les variations de la fonction g .

D'après la première question, pour tout $x \in \left] \frac{1}{e}; +\infty \right[$, on a $\ln(x) + 1 > 0$.

De plus, pour tout $x \in \left] \frac{1}{e}; +\infty \right[$, on a aussi $x > 0$.

Donc pour tout $x \in \left] \frac{1}{e}; +\infty \right[$, on a $g'(x) > 0$.

Ainsi, la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $\left] \frac{1}{e}; +\infty \right[$.

• Calculons les limites de la fonction g aux bords de son domaine de définition.

★ **Limite en $\frac{1}{e}$:**

Par continuité de la fonction $\ln$ en $\frac{1}{e}$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} \ln(x) = \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1,$$

donc par somme, $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} \ln(x) + 1 = 0$.

Or $\lim_{X \rightarrow 0} \ln(X) = -\infty$, donc par composition de limites, on obtient :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} g(x) = -\infty}.$$

★ **Limite en $+\infty$:**

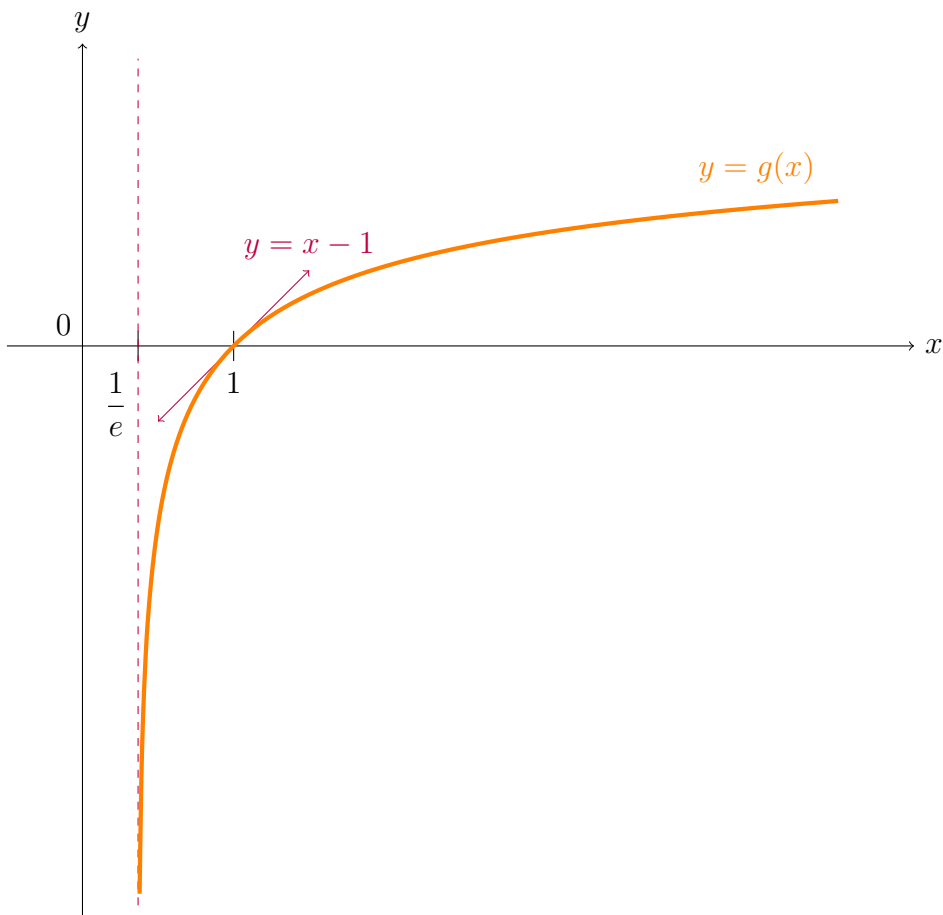
On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) + 1 = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$, donc par composition de limites, on obtient que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

Dressons alors le tableau de variations de la fonction f .

x	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$		$-\infty$	$+\infty$

Traçons enfin l'allure du graphe de la fonction g .



3. Étudions la fonction

$$\varphi: u \mapsto \frac{u}{\sqrt{9-u^2}}.$$

- (a) • Trouvons le domaine de définition de la fonction
- φ
- .

★ La fonction $\text{id}: u \mapsto u$ est définie sur $\mathbb{R}$.★— La fonction $p: u \mapsto 9-u^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale.— La fonction racine carrée r est définie sur $\mathbb{R}_+$.Leur composée $r \circ p: u \mapsto \sqrt{9-u^2}$ est donc définie sur

$$\{u \in \mathbb{R} \mid p(x) \in \mathbb{R}_+\} = \{u \in \mathbb{R} \mid 9-u^2 \geq 0\}.$$

Or pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} 9-u^2 \geq 0 &\iff 3^2-u^2 \geq 0 \\ &\iff (3-u)(3+u) \geq 0 \text{ par identité remarquable} \\ &\iff \begin{cases} 3-u \leq 0 \\ 3+u \leq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 3-u \geq 0 \\ 3+u \geq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3 \leq u \\ u \leq -3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 3 \geq u \\ u \geq -3 \end{cases} \\ &\iff 3 \leq u \leq -3 \text{ ou } -3 \leq u \leq 3 \\ &\iff -3 \leq u \leq 3 \text{ car } 3 > -3, \end{aligned}$$

donc la fonction $r \circ p$ est définie sur $[-3; 3]$.Ainsi, le quotient $\varphi = \frac{\text{id}}{r \circ p}$ est défini sur

$$\{u \in \mathbb{R} \cap [-3; 3] \mid (r \circ p)(u) \neq 0\} = \{u \in [-3; 3] \mid \sqrt{9-u^2} \neq 0\}.$$

Or le seul point en lequel la fonction racine carrée s'annule est 0, donc pour tout $u \in [-3; 3]$, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} \sqrt{9-u^2} = 0 &\iff 9-u^2 = 0 \\ &\iff u^2 = 9 \\ &\iff u = -3 \text{ ou } u = 3, \end{aligned}$$

donc la fonction φ est définie sur

$$\{u \in [-3; 3] \mid u \neq -3 \text{ et } u \neq 3\} = \boxed{]-3; 3[}.$$

- Trouvons le domaine de dérivabilité de la fonction
- φ
- .

★ La fonction id est dérivable sur $\mathbb{R}$.★— La fonction p est dérivable sur $\mathbb{R}$.

— La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Or, d'après les calculs précédents, on a :

$$\forall u \in]-3; 3[, 9 - u^2 > 0,$$

donc la fonction $r \circ p$ est dérivable sur $] - 3; 3[$ comme composée de fonctions dérivables.

Ainsi, la fonction φ est dérivable sur son domaine de définition $] - 3; 3[$ comme quotient de fonctions dérivables.

(b) Calculons la dérivée de la fonction φ .

- Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\text{id}'(u) = 1$.
- $\star$ Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $p'(u) = -2u$.
- $\star$ Pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, on a $r'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$.

Donc pour tout $u \in] - 3; 3[$, on a :

$$\begin{aligned} (r \circ p)'(u) &= p'(u)r'(p(u)) \\ &= -2u \times \frac{1}{2\sqrt{p(u)}} \\ &= -\frac{u}{\sqrt{p(u)}} \\ &= \boxed{-\frac{u}{\sqrt{9 - u^2}}}. \end{aligned}$$

Ainsi, la dérivée de la fonction $\varphi = \frac{\text{id}}{r \circ p}$ est donnée par :

pour tout $u \in] - 3; 3[$,

$$\begin{aligned} \varphi'(u) &= \frac{\text{id}'(u)(r \circ p)(u) - \text{id}(u)(r \circ p)'(u)}{(r \circ p)^2(u)} \\ &= \frac{1 \times \sqrt{9 - u^2} - u \left(-\frac{u}{\sqrt{9 - u^2}} \right)}{(\sqrt{9 - u^2})^2} \\ &= \frac{\sqrt{9 - u^2} + \frac{u^2}{\sqrt{9 - u^2}}}{9 - u^2} \\ &= \frac{(9 - u^2) + u^2}{\sqrt{9 - u^2}} \\ &= \frac{9}{\sqrt{9 - u^2}} \\ &= \boxed{\frac{9}{(9 - u^2)\sqrt{9 - u^2}}}. \end{aligned}$$

- (c) • Étudions les variations de la fonction φ .

★ Pour tout $u \in]-3; 3[$, on a $9 - u^2 > 0$ (d'après les calculs de la première sous-question).

★ De plus, la fonction racine carrée est à valeurs positives, donc pour tout $u \in]-3; 3[$, on a $\sqrt{9 - u^2} \geq 0$.

Ainsi, pour tout $u \in]-3; 3[$, on a $\varphi'(u) > 0$,

donc la fonction φ est strictement croissante sur l'intervalle $] - 3; 3[$.

- Calculons les limites de la fonction φ en -3 et en 3 .

★ **Limite en -3 :**

— On a $\lim_{u \rightarrow -3^+} (9 - u^2) = 0^+$ et, par continuité de la fonction racine carrée en 0 ,
 $\lim_{U \rightarrow 0^+} \sqrt{U} = 0^+$, donc par composition de limites, on obtient que

$$\lim_{u \rightarrow -3^+} \sqrt{9 - u^2} = 0^+.$$

— Par inverse de limites, il s'ensuit que

$$\lim_{u \rightarrow -3^+} \frac{1}{\sqrt{9 - u^2}} = +\infty.$$

— Or $\lim_{u \rightarrow -3} u = -3 < 0$, donc par produit de limites, on obtient :

$$\boxed{\lim_{u \rightarrow -3^+} \varphi(u) = -\infty}.$$

★ **Limite en 3 :**

— On a $\lim_{u \rightarrow 3^-} (9 - u^2) = 0^+$ et, par continuité de la fonction racine carrée en 0 ,
 $\lim_{U \rightarrow 0^+} \sqrt{U} = 0^+$, donc par composition de limites, on obtient que

$$\lim_{u \rightarrow 3^-} \sqrt{9 - u^2} = 0^+.$$

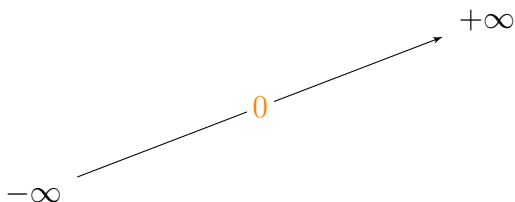
— Par inverse de limites, il s'ensuit que

$$\lim_{u \rightarrow 3^-} \frac{1}{\sqrt{9 - u^2}} = +\infty.$$

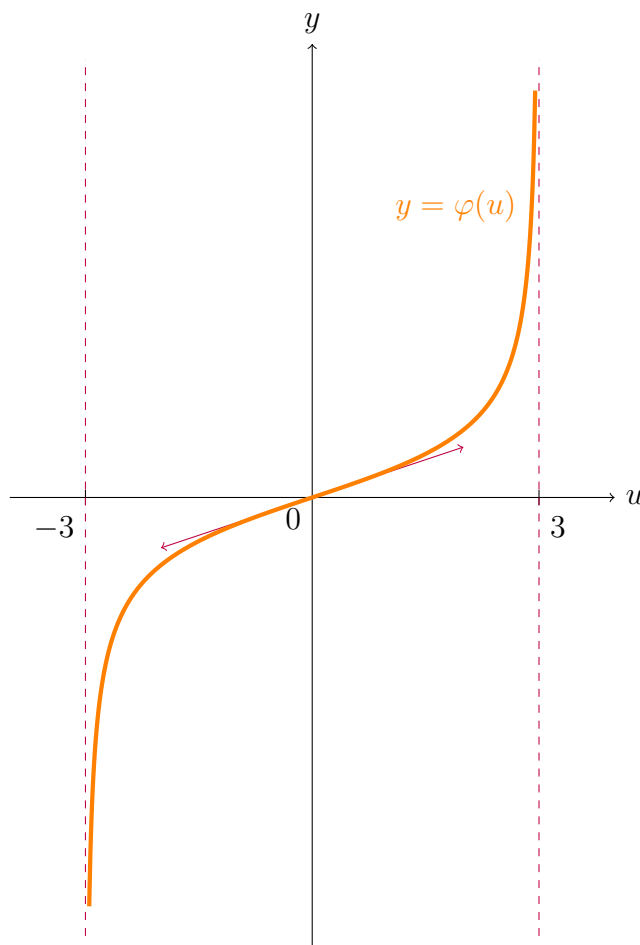
— Or $\lim_{u \rightarrow 3} u = 3 > 0$, donc par produit de limites, on obtient :

$$\boxed{\lim_{u \rightarrow 3^-} \varphi(u) = +\infty}.$$

- Dressons alors le tableau de variations de la fonction φ .

u	-3	0	3
$\varphi'(u)$	$+$		
$\varphi(u)$			

Traçons enfin l'allure du graphe de la fonction φ .



4. Étudions la fonction

$$h: s \mapsto (s^2 - 2s - 11)e^{2s}.$$

(a) Trouvons les domaines de définition et de dérivabilité de la fonction h .

- La fonction $p: s \mapsto s^2 - 2s - 11$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale.
- ★ La fonction $u: s \mapsto 2s$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale.

★ La fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc leur composée $\exp \circ u: s \mapsto e^{2s}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, la fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit des fonctions p et $\exp \circ u$ qui sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

(b) Calculons sa dérivée.

- Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a $p'(s) = 2s - 2 = \boxed{2(s - 1)}$.
- ★ Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a $u'(s) = 2$.
- ★ Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a $\exp'(x) = e^x$.

Donc pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\exp \circ u)'(s) = u'(s) \exp'(u(s)) = \boxed{2e^{2s}}.$$

Ainsi, pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} h'(s) &= p'(s) (\exp \circ u)(s) + p(s) (\exp \circ u)'(s) \\ &= 2(s - 1)e^{2s} + (s^2 - 2s - 11)2e^{2s} \\ &= 2e^{2s} [(s - 1) + (s^2 - 2s - 11)] \\ &= \boxed{2e^{2s}(s^2 - s - 12)}. \end{aligned}$$

Le trinôme $s \mapsto s^2 - s - 12$ admet pour discriminant

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 1 + 48 = 49,$$

donc ses racines sont

$$\frac{1 - 7}{2} = -3 \text{ et } \frac{1 + 7}{2} = 4.$$

Le trinôme ayant pour coefficient dominant 1, il se factorise ainsi :

$$\forall s \in \mathbb{R}, s^2 - 2s - 11 = (s + 3)(s - 4).$$

Ainsi, pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a :

$$\boxed{h'(s) = 2e^{2s}(s + 3)(s - 4)}.$$

(c) • Étudions les variations de la fonction h .

Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} h'(s) > 0 &\iff 2e^{2s}(s + 3)(s - 4) > 0 \\ &\iff (s + 3)(s - 4) > 0 \text{ car } 2 > 0 \text{ et } e^{2s} > 0 \\ &\iff \begin{cases} s + 3 < 0 \\ s - 4 < 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} s + 3 > 0 \\ s - 4 > 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} s < -3 \\ s < 4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} s > -3 \\ s > 4 \end{cases} \\ &\iff s < -3 \text{ ou } s > 4. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le théorème reliant signe de la dérivée et monotonie, la fonction h est strictement croissante sur $] -\infty; -3]$, strictement décroissante sur $[-3; 4]$ et strictement croissante sur $[4; +\infty[$.

- Calculons les limites de la fonction h aux infinis et ses valeurs en -3 et en 4 .

★ **Limite en $+\infty$:**

— Pour tout $s \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$p(s) = s^2 - 2s - 11 = s^2 \left(1 - \frac{2}{s} - \frac{11}{s^2} \right).$$

$$\text{Or } \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{s} - \frac{11}{s^2} \right) = 1 > 0 \text{ et } \lim_{s \rightarrow +\infty} s^2 = +\infty, \text{ donc}$$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} p(s) = +\infty.$$

— De plus, $\lim_{s \rightarrow +\infty} 2s = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$, donc par composition de limites, on obtient que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} e^{2s} = +\infty.$$

Ainsi, par produit de limites, on obtient que $\boxed{\lim_{s \rightarrow +\infty} h(s) = +\infty}$.

★ **Limite en $-\infty$:**

Pour calculer la limite de h en $-\infty$, nous utiliser la croissance comparée suivante (et uniquement celle-ci) :

$$\boxed{\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty}.$$

Réécrivons pour cela la fonction h : pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} h(s) &= (s^2 - 2s - 11)e^{2s} \\ &= s^2 e^{2s} - 2s e^{2s} - 11e^{2s} \\ &= \frac{s^2}{e^{-2s}} + \frac{-2s}{e^{-2s}} - 11e^{2s} \\ &= \frac{s^2}{(e^{-s})^2} + \frac{-2s}{e^{-2s}} - 11e^{2s} \\ &= \left(\frac{s}{e^{-s}} \right)^2 + \frac{-2s}{e^{-2s}} - 11e^{2s} \\ &= \boxed{\left(\frac{-s}{e^{-s}} \right)^2 + \frac{-2s}{e^{-2s}} - 11e^{2s}}. \end{aligned}$$

— Comme $\lim_{s \rightarrow -\infty} 2s = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, on obtient par composition puis produit de limites que

$$\boxed{\lim_{s \rightarrow -\infty} 11e^{2s} = 0}.$$

- On a $\lim_{s \rightarrow -\infty} (-2s) = +\infty$ et, d'après le résultat précédent de croissances comparées, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$, donc par composition de limites, on obtient que

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{e^{-2s}}{-2s} = +\infty.$$

Donc par inverse de limite, on obtient :

$$\boxed{\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{-2s}{e^{-2s}} = 0}.$$

- De même, comme $\lim_{s \rightarrow -\infty} (-s) = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$, on obtient par composition de limites que

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{e^{-s}}{-s} = +\infty,$$

donc par inverse de limite, que $\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{-s}{e^{-s}} = 0$.

Par produit de limites, on obtient alors que

$$\boxed{\lim_{s \rightarrow -\infty} \left(\frac{-s}{e^{-s}} \right)^2 = 0}.$$

Finalement, par somme de limites, on obtient $\boxed{\lim_{s \rightarrow -\infty} h(s) = 0}$.

★ **Valeur en -3 :**

En -3, la fonction h vaut :

$$h(-3) = [(-3)^2 - 2(-3) - 11] e^{-6} = (9 + 6 - 11) e^{-6} = \boxed{\frac{4}{e^6}}.$$

★ **Valeur en 4 :**

En 4, la fonction h vaut :

$$h(4) = (4^2 - 8 - 11) e^8 = \boxed{-3e^8}.$$

Dressons enfin le tableau de variations de la fonction h .

s	$-\infty$	-3	4	$+\infty$			
$h'(s)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(s)$			0	$\frac{4}{e^6}$	$-3e^8$		$+\infty$

Pour compléter le tableau de variations, cherchons les points en lesquels la fonction h s'annule.

Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} h(s) = 0 &\iff (s^2 - 2s - 11)e^{2s} = 0 \\ &\iff s^2 - 2s - 11 = 0, \end{aligned}$$

car la fonction exponentielle ne s'annule pas.

Le trinôme $p: s \mapsto s^2 - 2s - 11$ a pour discriminant

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-11) = 4 + 44 = 48,$$

donc pour racines

$$\frac{2 - \sqrt{48}}{2} = \frac{2 - \sqrt{16 \times 3}}{2} = \frac{2 - 4\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sqrt{3} \text{ et } \frac{2 + \sqrt{48}}{2} = 1 + 2\sqrt{3}.$$

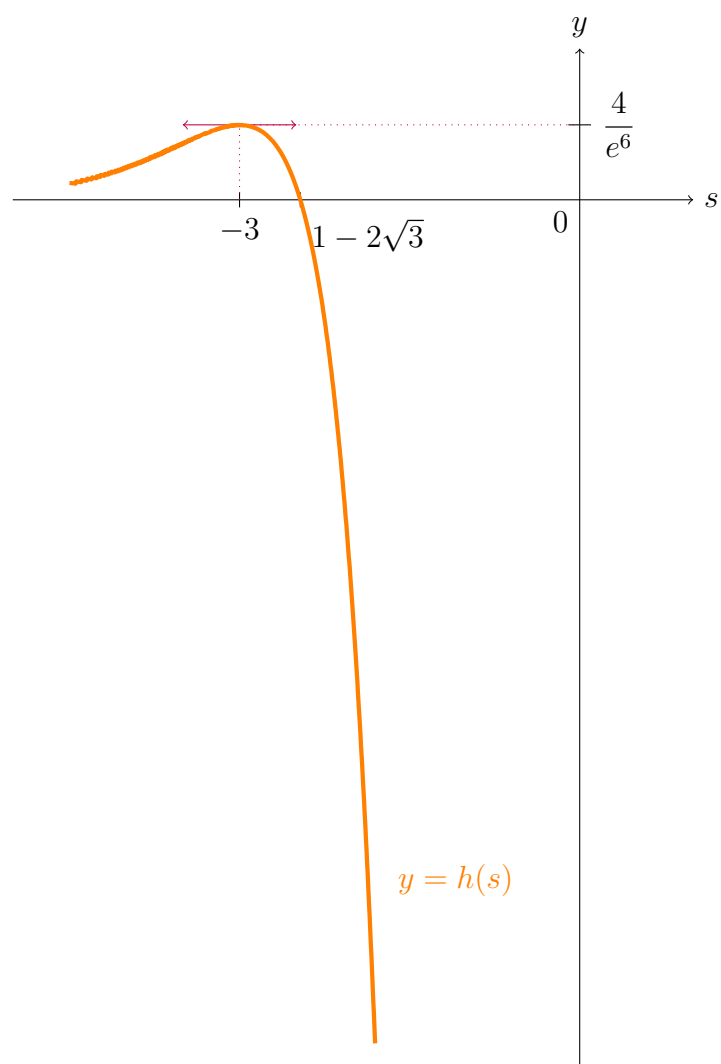
Ainsi, pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence suivante :

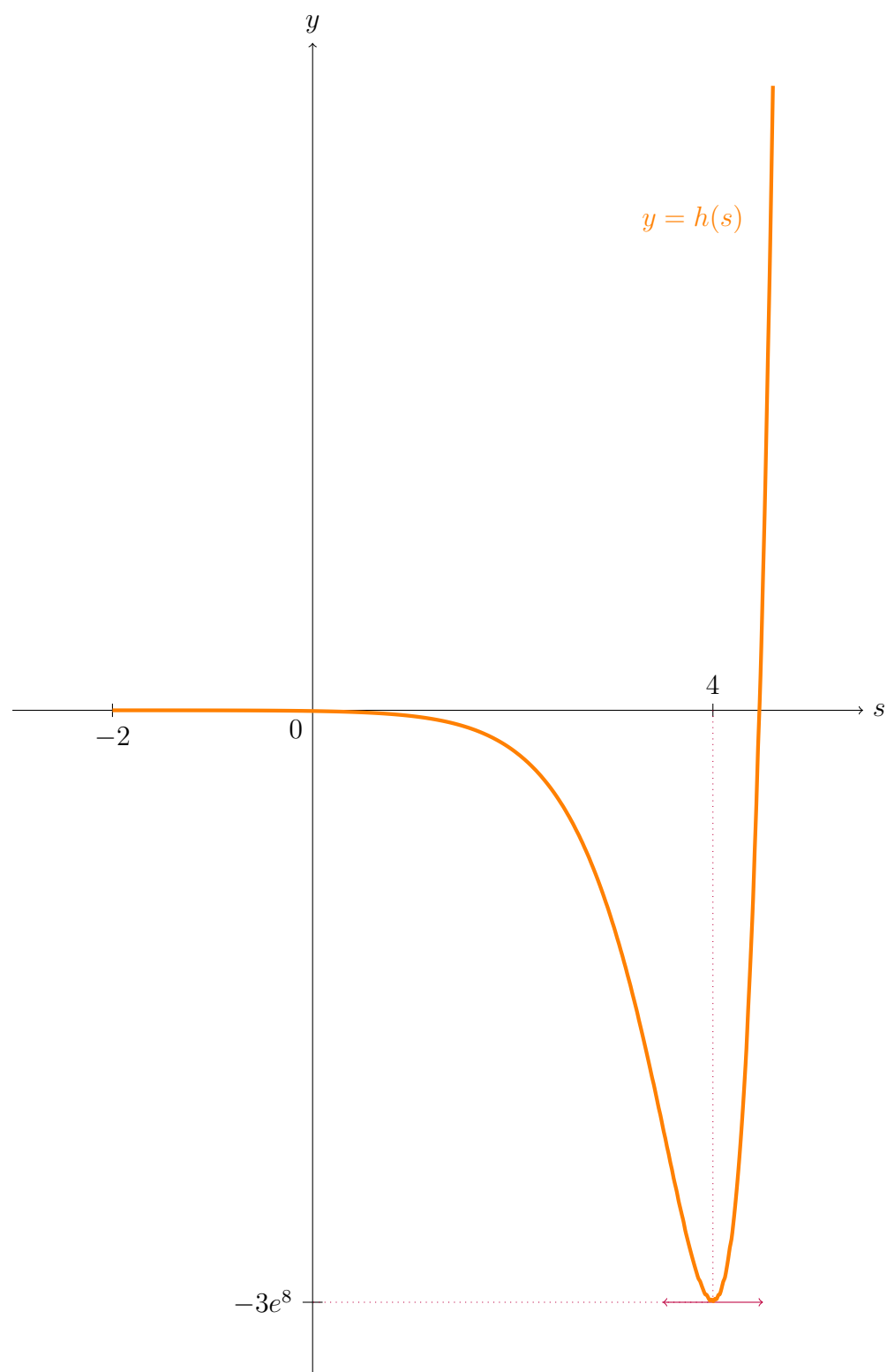
$$h(s) = 0 \iff s = 1 - 2\sqrt{3} \text{ ou } s = 1 + 2\sqrt{3}.$$

Complétons alors le tableau de variations de la fonction h .

s	$-\infty$	-3	$1 - 2\sqrt{3}$	4	$1 + 2\sqrt{3}$	$+\infty$
$h'(s)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(s)$						

Traçons enfin l'allure du graphe de la fonction h sur $] -\infty; -2]$ et sur $[-2; +\infty[$, à deux échelles différentes.





Exercice 7 — Avec des paramètres

Soient A, E, R, R_2, C, ω et φ des réels strictement positifs.

1. Afin de trouver son maximum, étudions la fonction suivante :

$$P: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$R_1 \longmapsto \frac{R_1 E^2}{(R_1 + R_2)^2}.$$

- Considérons les fonctions

$$u: R_1 \longmapsto R_1 E^2$$

$$v: R_1 \longmapsto (R_1 + R_2)^2,$$

de sorte que $P = \frac{u}{v}$.

- ★ Les fonctions u et v sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ comme fonctions polynomiales, donc elles sont en particulier bien définies sur $\mathbb{R}_+$.
- ★ Comme la constante R_2 est strictement positive, pour tout $R_1 \in \mathbb{R}_+$, on a $R_1 + R_2 > 0$, donc $(R_1 + R_2)^2 \neq 0$.

Ainsi, $\text{la fonction } P = \frac{u}{v} \text{ est bien défini et dérivable sur } \mathbb{R}_+$, comme quotient de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

- Calculons la dérivée de la fonction P .

- ★ Pour tout $R_1 \in \mathbb{R}$, on a $u'(R_1) = E^2$.
- ★ Pour tout $R_1 \in \mathbb{R}$, on a :

$$v(R_1) = (R_1 + R_2)^2 = R_1^2 + 2R_1 R_2 + R_2^2.$$

Donc pour tout $R_1 \in \mathbb{R}$, on a :

$$v'(R_1) = 2R_1 + 2R_2$$

$$= \boxed{2(R_1 + R_2)}.$$

Ainsi, pour tout $R_1 \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$P'(R_1) = \frac{u'(R_1)v(R_1) - u(R_1)v'(R_1)}{v^2(R_1)}$$

$$= \frac{E^2 (R_1 + R_2)^2 - R_1 E^2 \times 2(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)^4}$$

$$= \frac{E^2 (R_1 + R_2) [(R_1 + R_2) - 2R_1]}{(R_1 + R_2)^4}$$

$$= \boxed{\frac{E^2 (R_2 - R_1)}{(R_1 + R_2)^3}}.$$

- Étudions alors les variations de la fonction P .

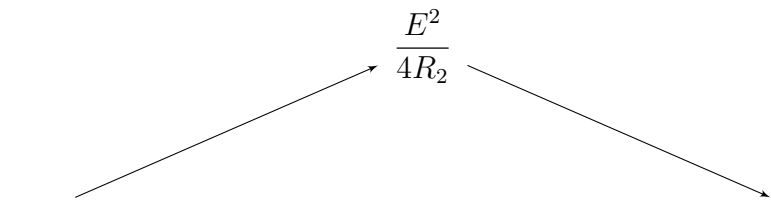
Comme la constante R_2 est strictement positive, pour tout $R_1 \in \mathbb{R}_+$, on a $R_1 + R_2 > 0$, donc $(R_1 + R_2)^3 > 0$.

Alors pour tout $R_1 \in \mathbb{R}_+$, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} P'(R_1) > 0 &\iff \frac{E^2 (R_2 - R_1)}{(R_1 + R_2)^3} > 0 \\ &\iff R_2 - R_1 > 0 \text{ car } E^2 > 0 \text{ et } (R_1 + R_2)^3 > 0 \\ &\iff R_1 < R_2. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction P est strictement croissante sur $[0; R_2]$ et décroissante sur $[R_2; +\infty[$.

Dressons son tableau de variations.

R_1	0	R_2	$+\infty$
$P'(R_1)$	+	0	-
$P(R_1)$			

Ainsi, la fonction P admet un maximum en R_2 , qui vaut

$$\begin{aligned} P(R_2) &= \frac{R_2 E^2}{(R_2 + R_2)^2} \\ &= \frac{R_2 E^2}{4R_2^2} \\ &= \frac{E^2}{4R_2}. \end{aligned}$$

Finalement, le maximum de la fonction P est $\frac{E^2}{4R_2}$.

2. Considérons la fonctions suivante :

$$\begin{aligned} u: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto E \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right). \end{aligned}$$

- La fonction u est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de composées de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Calculons sa dérivée.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} u'(t) &= E \left[0 - \left(-\frac{1}{RC} \right) e^{-\frac{t}{RC}} \right] \\ &= \boxed{\frac{E}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}}. \end{aligned}$$

3. Considérons la fonction suivante :

$$\begin{aligned} s: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto A \sin(t) \cos(2t) \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

Considérons aussi les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f: t &\longmapsto A \sin(t) \\ g: t &\longmapsto \cos(2t) \\ h: t &\longmapsto \sin(\omega t + \varphi), \end{aligned}$$

de sorte que $s = fgh$.

- Les fonctions f , g et h sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ (comme composées de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$).

Donc par produit, la fonction s est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Calculons sa dérivée.

- ★ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{f'(t) = A \cos(t)}$.
- ★ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{g'(t) = -2 \sin(2t)}$.
- ★ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{h'(t) = \omega \cos(\omega t + \varphi)}$.
- ★ Calculons la dérivée du produit fg .

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} (fg)'(t) &= f'(t)g(t) + f(t)g'(t) \\ &= A \cos(t) \cos(2t) + A \sin(t) \times (-2) \sin(2t) \\ &= \boxed{A [\cos(t) \cos(2t) - 2 \sin(t) \sin(2t)]}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} s'(t) &= (fgh)'(t) \\ &= (fg)'(t)h(t) + (fg)(t)h'(t) \\ &= A [\cos(t) \cos(2t) - 2 \sin(t) \sin(2t)] \sin(\omega t + \varphi) \\ &\quad + A \sin(t) \cos(2t) \times \omega \cos(\omega t + \varphi) \\ &= A [\cos(t) \cos(2t) \sin(\omega t + \varphi) - 2 \sin(t) \sin(2t) \sin(\omega t + \varphi) \\ &\quad + \omega \sin(t) \cos(2t) \cos(\omega t + \varphi)]. \end{aligned}$$

Exercice 8 — Plus de logarithme

1. Déterminons le domaine de définition de la fonction

$$\varphi: x \mapsto \ln(x^2 - 1).$$

- La fonction $x \mapsto x^2 - 1$ est définie sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale.
- La fonction $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, leur composée φ est définie sur l'ensemble suivant :

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 > 0\}.$$

Or pour tout réel x , on a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} x^2 - 1 > 0 &\iff (x - 1)(x + 1) > 0 \text{ par identité remarquable} \\ &\iff \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x - 1 < 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x > 1 \\ x > -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x < 1 \\ x < -1 \end{cases} \\ &\iff x > 1 \text{ ou } x < -1 \\ &\iff x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[, \end{aligned}$$

donc la fonction φ est définie sur

$$\boxed{\mathcal{D} =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[}.$$

2. Déterminons si les fonctions suivantes coïncident avec la fonction φ sur l'ensemble $\mathcal{D} \cap]1; +\infty[$, c'est-à-dire sur $]1; +\infty[$.

(a) Soit $f: x \mapsto 2 \ln(x) - 1$.

Alors pour tout $x \in]1; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \ln(x) - 1 \\ &= \ln(x^2) - 1 \\ &= \ln(x^2) - \ln(e) \\ &= \boxed{\ln\left(\frac{x^2}{e}\right)}. \end{aligned}$$

Appliquons alors les fonctions f et φ à $\sqrt{e}$, qui appartient bien à $]1; +\infty[$:

$$\begin{cases} f(\sqrt{e}) = \ln\left(\frac{(\sqrt{e})^2}{e}\right) = \ln(1) = 0 \\ \varphi(\sqrt{e}) = \ln\left((\sqrt{e})^2 - 1\right) = \ln(e - 1). \end{cases}$$

Or $e - 1 \neq 1$, donc $\ln(e - 1) \neq 0$, donc $\boxed{f(\sqrt{e}) \neq \varphi(\sqrt{e})}$.

Ainsi, $\boxed{\text{les fonctions } f \text{ et } \varphi \text{ ne coïncident pas sur }]1; +\infty[}$.

(b) Soit $g: x \mapsto \ln(x - 1) + \ln(x + 1)$.

Alors pour tout $x \in]1; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(x - 1) + \ln(x + 1) \\ &= \ln[(x - 1)(x + 1)] \\ &= \ln(x^2 - 1) \text{ par identité remarquable} \\ &= \boxed{\varphi(x)}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{les fonctions } g \text{ et } \varphi \text{ coïncident sur }]1; +\infty[}$.

(c) Soit $h: x \mapsto \ln(x - 1) - \ln(x + 1)$.

Alors pour tout $x \in]1; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} h(x) &= \ln(x - 1) - \ln(x + 1) \\ &= \boxed{\ln\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)}. \end{aligned}$$

Appliquons alors les fonctions h et φ à 2, qui appartient bien à $]1; +\infty[$:

$$\begin{cases} h(2) = \ln\left(\frac{2 - 1}{2 + 1}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3) \\ \varphi(2) = \ln(2^2 - 1) = \ln(3). \end{cases}$$

Or $3 \neq 1$, donc $\ln(3) \neq 0$, donc $\ln(3) \neq -\ln(3)$, donc $\boxed{h(2) \neq \varphi(2)}$.

Ainsi, $\boxed{\text{les fonctions } h \text{ et } \varphi \text{ ne coïncident pas sur }]1; +\infty[}$.